Elaborado por: Miguel Ángel Labrador
Ingeniería electrónica
Carnet: 12-10423
Twitter: @miguelangel2801

Universidad Simón Bolívar
Matemáticas V (MA-2112)
Período Sep-Dic 2019

SOLUCIÓN DEL SEGUNDO PARCIAL

Trimestre Sep-Dic 2019 (50 %)

<u>Problema 1:</u> (13 puntos) Sea $D^* = \{(u, v) \in \mathbb{R} : u + v \leq 1, u + 2 \geq 0, u \geq 0\}$, la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(u, v) = (u + v, v - u^2)$ y $D = T(D^*)$. Calcular el área de D.

<u>Solución:</u>

Para resolver el problema hay que recordar el enunciado del teorema de cambio de variables para integrales doble:

<u>Teorema de Cambio de Variables para Integrales Doble:</u>

Sean D y D^* regiones elementales del plano y sea $T : D^* \to D$ de clase C^1 e inyectiva en D^*, con $D = T(D^*)$. Entonces para una función integrable en $f : D \to \mathbb{R}$, se tiene:

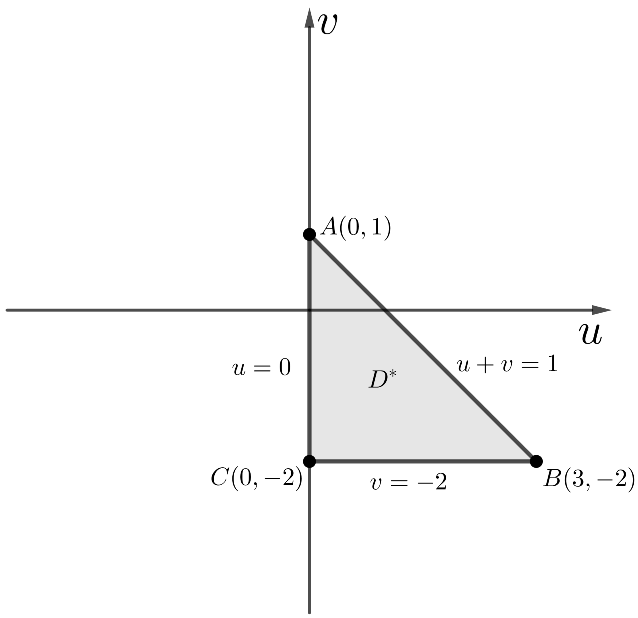
$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D^*} f\left(T(u, v)\right) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dudv$$

Note que lo que se pide es $A(D) = \iint_D dxdy$ que, suponiendo que se cumplen todas las hipótesis del teorema, puede obtenerse mediante la expresión:

$$A(D) = \iint_{D^*} \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dudv \tag{1}$$

Tome en cuenta que en este problema $f(x, y) = 1$, ya que estamos buscando el área. Por otro lado, note que este problema es un tanto diferente a otros más comunes donde se da la región D y hay que encontrar la región D^*, acá se tiene D^* como dato y no es necesario realizar el proceso de encontrar la otra región (es precisamente la ayuda que aporta el teorema), de manera que para proceder a resolver el problema solo necesitamos calcular el Jacobiano y calcular la integral del mismo sobre la región D^* para obtener lo que se pide, sin embargo, antes de proceder es importante verificar que se cumplen las hipótesis del problema:

Graficamos la región D^* la cual es una región elemental.



Debemos probar que la transformación T es inyectiva en D^*, entonces debemos probar que para (u_1, v_1) y (u_2, v_2) pertenecientes a D^*

$$T(u_1, v_1) = T(u_2, v_2) \Longrightarrow (u_1, v_1) = (u_2, v_2)$$

Resolvemos el correspondiente sistema

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= u_2 + v_2 \\ v_1 - u_1^2 &= v_2 - u_2^2 \end{aligned}$$

De acá se desprende, haciendo simple eliminación,

$$u_1 + u_1^2 = u_2 + u_2^2 \Longrightarrow u_1 - u_2 = -(u_1^2 - u_2^2) \Longrightarrow u_1 = u_2 \text{ ó } u_1 + u_2 = -1 \text{ , si } u_1 \neq u_2$$

Se concluye que T sí es inyectiva en D^* (más no en todo en $\mathbb{R}^2$). Note que $u_1 + u_2 = -1$ no se cumple nunca ya que $u_1, u_2 \geq 0$ por pertenecer a D^*.

Ahora solo debemos calcular el Jacobiano de T

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = abs\left(\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix}\right) = abs\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2u & 1 \end{vmatrix}\right) = |1 + 2u|$$

Finalmente nuestro Jacobiano está dado por $|2u+1|$.

Calculamos usando (1) y con apoyo de la figura:

$$\begin{aligned}
A(D) &= \iint_{D^*} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \iint_{D^*} |2u+1| dvdu = \int_{u=0}^{u=3}\int_{v=-2}^{v=1-u} (2u+1)dvdu \\
&= \int_0^3 (2u+1)(3-u)du = \int_0^3 (-2u^2+5u+3)du = \left(-\frac{2u^2}{3} + \frac{5u^2}{2} + 3u\right|_0^3 \\
&= -18 + \frac{45}{2} + 9 = \frac{27}{2}
\end{aligned}$$

Finalmente el área de la región D^* mapeada por T es $\frac{27}{2}$.

Problema 2: (12 puntos) Sea $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = 2(y+2), y + x \leq 2\}$, C orientada en sentido horario y $F(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}\right)$. Calcular $\oint_C \vec{f} \cdot \vec{ds}$.

Solución:

Como es de esperarse, podemos solucionar el problema de una forma más sencilla que por definición, usando el Teorema de Green.

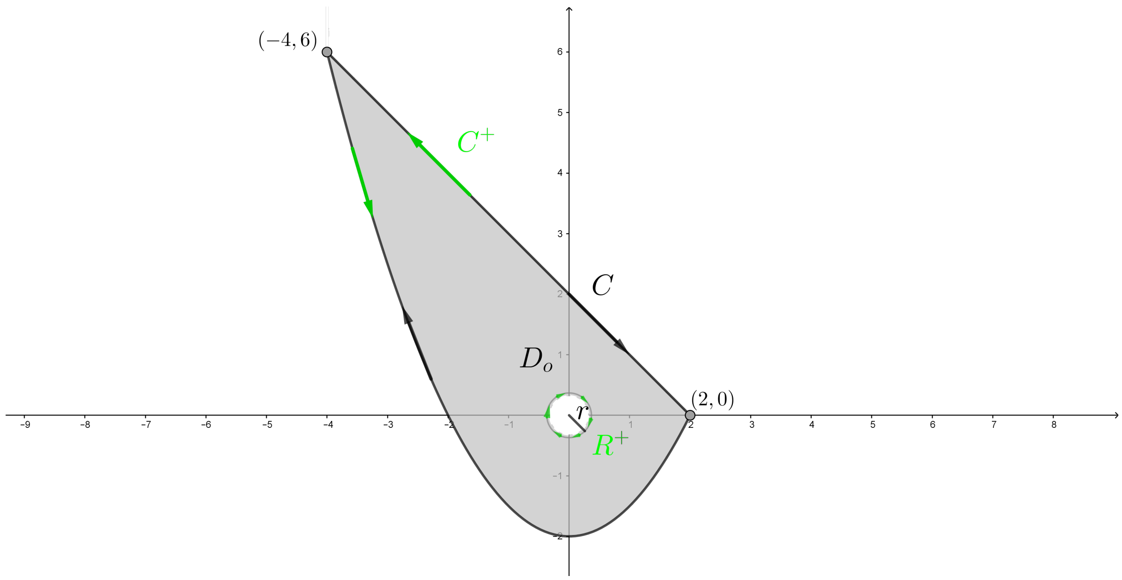
Teorema de Green:

Sea D una región simple y C su frontera, orientada en el sentido positivo, suponiendo que $P : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y $Q : D \longrightarrow \mathbb{R}$ son de clase C^1, entonces:

$$\int_{C^+} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \tag{1}$$

Suponiendo que los supuestos del teorema se cumplen podríamos calcular la integral utilizando la ecuación (1). Como es evidente que no es así, debemos hacer algunos ajustes para poder utilizar el teorema.

Para empezar, tanto $P(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ y $Q(x,y) = -\frac{x}{x^2+y^2}$ no son C^1 en D puesto que en el punto $(0,0)$ las funciones no están definidas. Para resolver esto se define el contorno $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$, con $r \to 0$, orientado en el sentido horario y que corresponde a la orientación de Green (positiva), ya que se quiere excluir el punto $(0,0)$ mientras se incluye el resto de la región D.



Para que se cumplan las hipótesis, usaremos el teorema pero ahora el contorno será ∂D_o^+, el cual es la frontera de la región $D_o = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = 2(y+2), y + x \leq 2, x^2 + y^2 \geq r^2\}$ orientada en el sentido de Green, además $\partial D_o^+ = C^+ \cup R^+$.

De esta manera ya podemos escribir

$$\int_{C^+ \cup R^+} Pdx + Qdy = \iint_{D_o} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

$$\int_{C^+} Pdx + Qdy + \int_{R^+} Pdx + Qdy = \iint_{D_o} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \tag{2}$$

Como lo que estamos buscando es la integral de línea sobre el contorno C en el sentido horario, que es el sentido contrario al determinado por la orientación de Green, podemos decir:

$$\int_{C^+} Pdx + Qdy = - \int_C Pdx + Qdy$$

que reemplazando en la ecuación (2) y despejando nos queda:

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_{R^+} Pdx + Qdy - \iint_{D_o} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy3) \qquad (()$$

El resto del problema será realizar los cálculos.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = - \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-(x^2 + y^2) + 2x^2 - (x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

Afortunadamente el integrando de la integral doble es cero y por lo tanto su valor será cero, lo que implica que solo es necesario calcular la integral del campo sobre el contorno R^+ y podemos usar la definición y apoyarnos de una parametrización en coordenadas polares.

Parametrizamos el contorno R como:

$$\sigma(t) = \left\{ \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix} : 0 < t \leq 2\pi \right\}$$

.

con $\sigma'(t) = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{pmatrix}$.

Note que esta parametrización impone una orientación con sentido contrario al de R^+.

Por definición nos queda:

$$\int_R \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy = \int_0^{2\pi} < \begin{pmatrix} \dfrac{\sin(t)}{r} \\ -\dfrac{\cos(t)}{r} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{pmatrix} > dt = -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi$$

Este es el resultado obtenido con la orientación impuesta por la parametrización, de forma que para obtener el verdadero resultado multiplicamos por menos y nos queda:

$$\int_{R^+} \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy = 2\pi$$

Finalmente, por la ecuación (3):

$$\oint_C \vec{f} \cdot \vec{ds} = 2\pi$$

Problema 3: (13 puntos) Sea $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 5, x^2 + y^2 \geq 4z\}$. Exprese el volumen de Ω en coordenadas cilíndricas y en coordenadas esféricas (sin calcular el volumen).

Solución:

Existen varias formas de abordar el problema. Podemos calcular la expresión que determina el volumen de la región pedida fijándonos directamente sobre el volumen de la región, lo cual es algo más complicado que calcular el volumen de una región Ψ como la que se muestra en la figura y restarla al valor del volumen total de la esfera de radio $\sqrt{5}$.

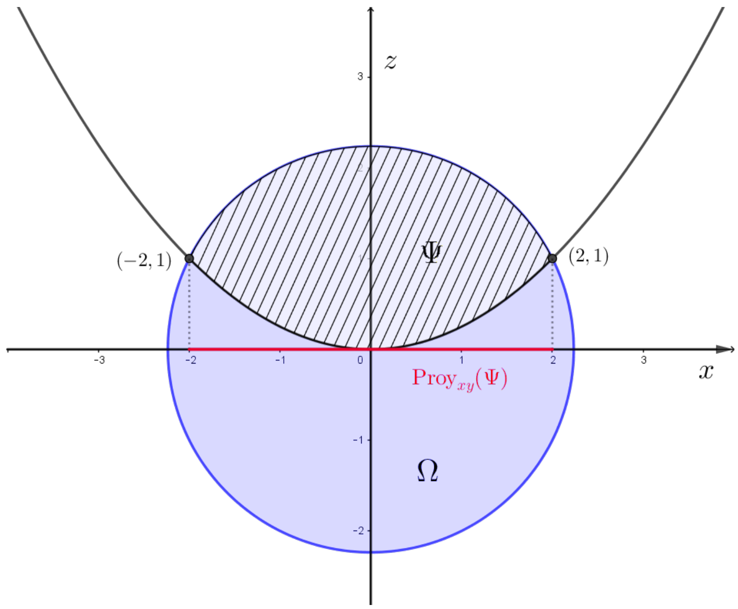


Figura 1: Perspectiva del volumen (plano z-x).

De forma que:

$$V(\Omega) = V(\text{esfera}) - V(\Psi) \tag{2}$$

El problema será entonces llegar a las expresiones del volumen $V(\Psi)$ en ambos sistemas coordenados.

En coordenadas cilíndricas:

Inicialmente, note desde qué superficie a qué superficie vamos, es decir, de dónde a dónde vamos en z. Vea que para cubrir todo el volumen debemos ir desde el paraboloide hasta la parte superior de la esfera y debemos hacerlo teniendo en cuenta que también debemos integrar en r, θ y lo haremos sobre toda la proyección del volumen sobre el plano xy.

Para darnos una idea de cómo es la proyección del volumen sobre el plano xy basta con ver el dibujo y notar que la proyección será la sombra que genera el sólido sobre el plano, para conocer esta proyección vemos cómo se intersectan las superficies del paraboloide y la esfera.

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=5 \\ x^2+y^2=4z \end{cases} \longrightarrow z^2+4z-5=0 \longrightarrow z=1 \text{ ó } z=-5$$

De acá se ve que la superficies se intersectan en el plano $z=1$ y que la proyección se puede ver como la región delimitada por la curva de nivel $z=1$ de cualquiera de las dos superficies. Si tomamos la superficie del paraboloide:

$$x^2+y^2=4(1) \longrightarrow x^2+y^2=(2)^2 \qquad \text{(Circunferencia de radio 2 centrada en el origen.)}$$

De forma que la proyección sería el circulo de ecuación $x^2+y^2 \leq 4$ y debemos integrar sobre todo el mismo.

Integramos desde la superficie del cono $z=\dfrac{x^2+y^2}{4}$ que, en coordenadas cilíndricas, sería $z=\dfrac{r^2}{4}$, hasta la superficie de la esfera $z=\sqrt{5-x^2-y^2}=\sqrt{5-r^2}$. Al mismo tiempo debemos integrar sobre la región definida por el círculo de radio 2, por lo cual debemos integrar en r desde 0 a 2 y en θ de 0 a 2π. De esta manera:

$$V(\Psi)=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{5-r^2}} r dz dr d\theta$$

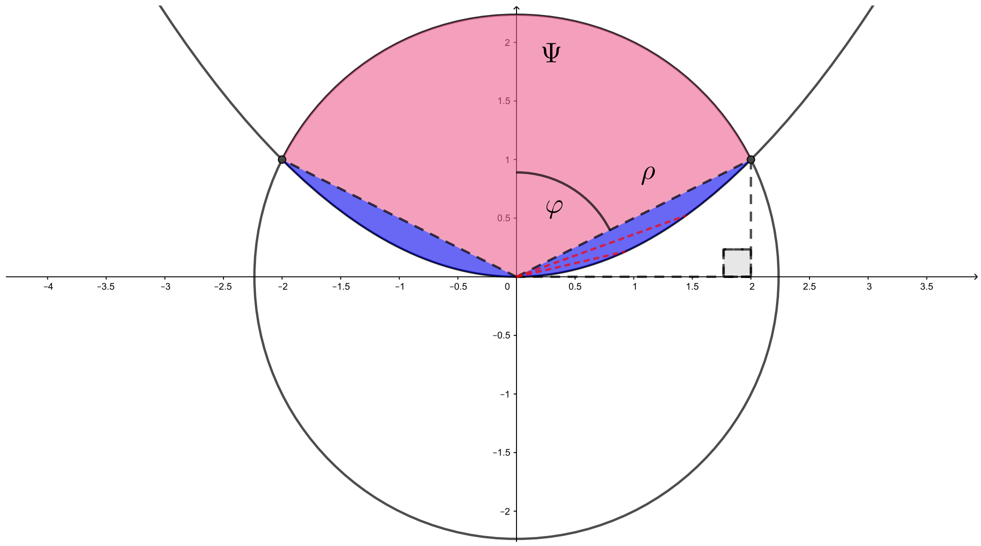
Recuerde que al expresar el volumen en coordenadas cilíndricas debemos tomar en cuenta el correspondiente Jacobiano.

Finalmente el valor de volumen pedido está dado por la expresión:

$$V(\Omega)=\frac{4\pi(\sqrt{5})^3}{3}-\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{5-r^2}} r dz dr d\theta$$

En coordenadas esféricas:

Ahora debemos tomar en cuenta que tenemos que integrar radialmente (ρ) y también en dos ángulos φ y θ como se muestra en la figura.



Debe notar que al integrar sobre este sólido, conviene integrar primero sobre la parte limitada por la esfera (en rojo) y luego por la parte limitada por el paraboloide (en azul). En el primer caso el radio ρ varía siempre entre 0 y $\sqrt{5}$ puesto que el radio de la esfera siempre es $\sqrt{5}$, no pasa igual con la otra parte puesto que a medida que recorremos el volumen, la longitud de ρ varía (líneas punteadas en rojo). Empezamos definiendo la expresión que determina el volumen de la región en rojo.

En ρ vamos desde 0 a $\sqrt{5}$, en θ vamos de 0 a 2π, sabemos que φ va desde 0 pero no sabemos hasta qué ángulo, sin embargo, del triángulo rectángulo que se ve en la figura se tiene que el ángulo que se forma entre eje z positivo y la hipotenusa del mismo es $\dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$. Entonces la expresión queda como:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\sqrt{5}} \rho^2 \sin(\varphi) d\rho d\varphi d\theta$$

Para integrar sobre la región azul que nos falta debemos determinar cómo varía ρ puesto que los otros límites de integración son sencillos: φ irá desde $\dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ hasta $\dfrac{\pi}{2}$ y θ desde 0 hasta 2π, de manera que para conseguir ρ reemplazamos el cambio de variables sobre la ecuación del paraboloide:

$$x^2 + y^2 = 4z \longrightarrow (\rho\cos(\theta)\sin(\varphi))^2 + (\rho\sin(\theta)\sin(\varphi))^2 = 4\rho\cos(\varphi) \longrightarrow \rho = \frac{4\cos(\varphi)}{\sin^2(\varphi)}$$

La expresión para este volumen queda como:

$$\int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{2}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{4\cos(\varphi)}{\sin^2(\varphi)}} \rho^2 \sin(\varphi) d\rho d\varphi d\theta$$

Finalmente el volumen de la región pedida, expresado en coordenadas cilíndricas, está dado por:

$$V(\Psi) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\sqrt{5}} \rho^2 \sin(\varphi) d\rho d\varphi d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{2}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{4\cos(\varphi)}{\sin^2(\varphi)}} \rho^2 \sin(\varphi) d\rho d\varphi d\theta$$

El volumen de la región Ω está dado por:

$$V(\Omega) = \frac{4\pi(\sqrt{5})^3}{3} - \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\sqrt{5}} \rho^2 \sin(\varphi) d\rho d\varphi d\theta - \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{2}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{4\cos(\varphi)}{\sin^2(\varphi)}} \rho^2 \sin(\varphi) d\rho d\varphi d\theta$$

Problema 4: (12 puntos) Dada la integral

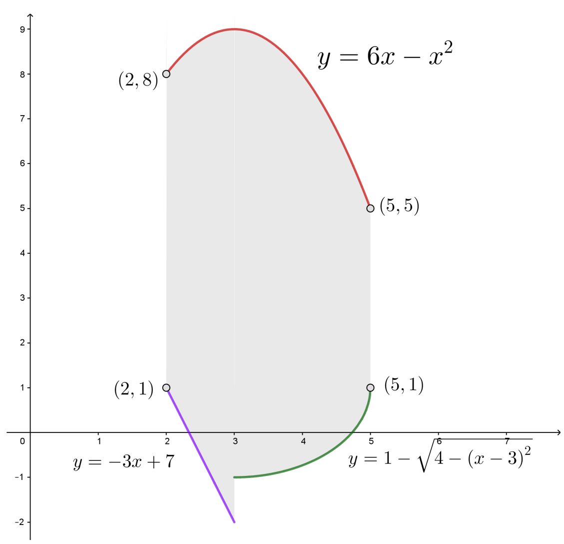
$$\int_2^3 \int_{-3x+7}^{6x-x^2} f(x,y)dydx + \int_3^5 \int_{1-\sqrt{4-(x-3)^2}}^{6x-x^2} f(x,y)dydx$$

a) Grafique la región de integración.

b) Cambie el orden de integración.

Solución:

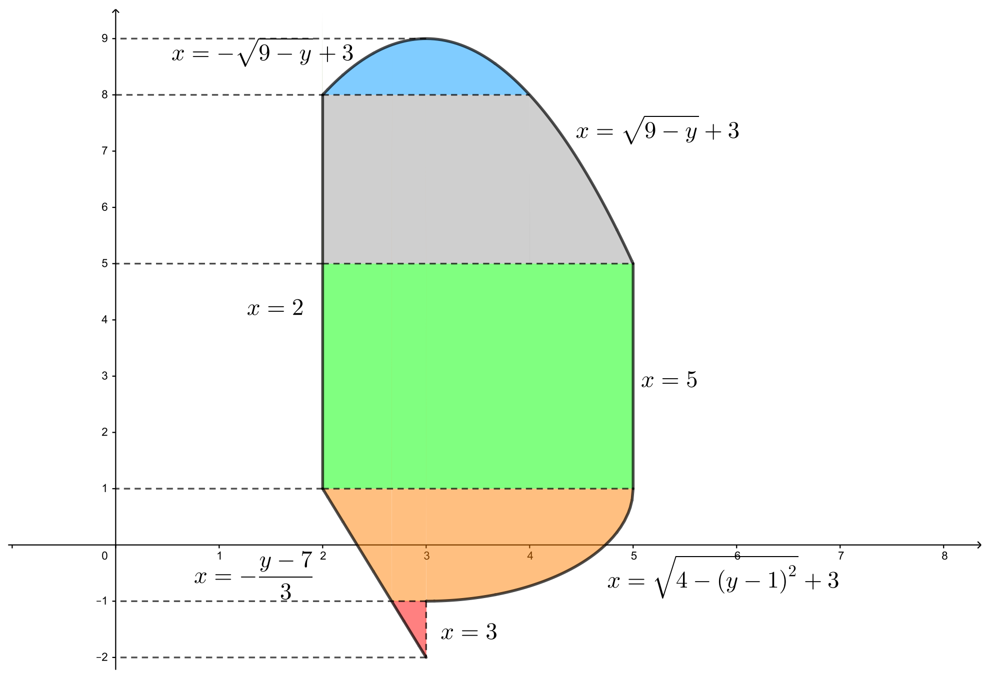
Empezamos graficando la región de integración que, como se ve en la figura es la región en color gris.



Cambiar el orden de integración significa, en este problema, integrar primero con respecto a x y luego con respecto a y, de forma que la(s) nuevas integral(es) queden de la siguiente forma:

$$\int_{y=y_1}^{y=y_2} \int_{x=f_1(y)}^{x=f_2(y)} f(x,y)dxdy$$

Para integrar de esta forma, dividimos la región de integración en cinco trozos como se muestra en la figura, con lo cual debemos plantear cinco integrales.



Tomaremos la primera integral sobre la región en rojo que va desde la recta, originalmente $y = -3x + 7$, y la recta $x = 3$ entre $y = -2$ y $y = -1$. Para escribir la la integral primero hay que escribir la primera recta en función de y, recuerde integramos primero con respecto a x. La integral nos queda entonces:

$$\int_{-2}^{-1} \int_{3}^{-\frac{y-7}{3}} f(x,y)dxdy$$

La siguiente integral será sobre la región naranja que va desde la misma recta que antes y hasta la semicircunferencia, que se puede expresar como $x = \sqrt{4-(y-1)^2}+1$, entre $y = -1$ y $y = 1$, de manera que obtenemos:

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\frac{y-7}{3}}^{\sqrt{4-(y-1)^2}+1} f(x,y)dxdy$$

La próxima integral es sencilla de expresar por ser la región un cuadrado. Nos queda:

$$\int_{1}^{5} \int_{2}^{5} f(x,y)dxdy$$

Para la integral que corresponde a la región gris debe tener en cuenta que, a la hora de integrar primero con respecto a x, debemos mirar las funciones desde el punto de vista de y. En este caso, vea que la parábola, vista desde y tendrá una *parte de arriba* y una *parte de abajo* (como una circunferencia). Tomando la ecuación original y completando cuadrados tenemos:

$$y = 6x - x^2 \longrightarrow 9 - y = x^2 - 6x + 9 \longrightarrow 9 - y = (x-3)^2 \longrightarrow x = \pm\sqrt{9-y} + 3$$

De aquí se ve que la expresión con raíz negativa corresponde a la parte menos positiva de la parábola y la expresión con la raíz positiva corresponde a la parte más positiva.

La integral sobre la región gris va desde $x = 2$ hasta la parte más positiva de la parábola, entre $y = 5$ y $y = 8$, de forma que:

$$\int_5^8 \int_2^{\sqrt{9-y}+3} f(x,y)dxdy$$

La última integral irá desde la parte menos positiva de la parábola hasta la más positiva, entre $x = 8$ y $x = 9$ (máximo de la parábola). Nos queda entonces:

$$\int_8^9 \int_{-\sqrt{9-y}+3}^{\sqrt{9-y}+3} f(x,y)dxdy$$

Después de cambiar el orden de integración obtenemos, finalmente, que la integral se expresa como:

$$\int_{-2}^{-1} \int_3^{-\frac{y-7}{3}} f(x,y)dxdy + \int_{-1}^{1} \int_{-\frac{y-7}{3}}^{\sqrt{4-(y-1)^2}+1} f(x,y)dxdy + \int_1^5 \int_2^5 f(x,y)dxdy +$$
$$+ \int_5^8 \int_2^{\sqrt{9-y}+3} f(x,y)dxdy + \int_8^9 \int_{-\sqrt{9-y}+3}^{\sqrt{9-y}+3} f(x,y)dxdy$$

Parcial resuelto y tipeado en LaTeXpor Miguel Ángel Labrador para GUIAS USB.

Miguel Ángel
12-10423
Ingeniería Electrónica
@miguelangel2801

GECO USB

gecousb.com.ve
Síguenos por: gecousb

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección miguelangel2801@gmail.com